Análisis de Objetos Mónada y Comónada a través de 2-adjunciones del tipo Adj-Mnd

Vázquez Márquez, Adrián.
Coordinación de Investigación, Universidad Incarnate Word, Campus Bajío
avazquez@uiwbajio.mx

Recibido: *22 de octubre de 2018*
Autorizado: *7 de diciembre de 208*

RESUMEN

En este artículo, se realiza un estudio de análisis de las leyes distributivas y las leyes distributivas mixtas junto con sus respectivas equivalencias a través del uso de 2-adjunciones del tipo **Adj-Mnd**. Si se expresa una ley distributiva como un objeto mónada en la 2-categoría **Mnd**(Cat) se puede hacer una equivalencia, a través de una 2-adjunción, entre estas leyes y objetos mónada en la 2-categoría $\mathbf{Adj}_R$(Cat). A su vez, estos últimos objetos mónada corresponden a levantamientos de mónadas sobre una categoría de Eilenberg-Moore. Por otro lado, la anterior equivalencia para objetos mónada también se puede relacionar con un par que consista de un levantamiento de Eilenberg-Moore y una extensión de Kleisli con cierta compatibilidad. El anterior resultado fue obtenido por E. Manes y P. Mulry (2010) y en este artículo se reescribirá a través de un contexto 2-categórico con un propiedad adicional de naturalidad en una de las mónadas involucradas. La situación dual se analiza para las leyes distributivas mixtas. El objetivo de este artículo es usar 2-adjunciones del tipo **Adj-Mnd** para analizar equivalencias e isomorfismos de estructuras categóricas en teoría clásica de mónadas con el fin de que las demostraciones sean cortas y claras, además de que estas equivalencias sean naturales en las mónadas involucradas.

Palabras claves: Leyes distributivas, mónadas, levantamientos, 2-adjunción.

ABSTRACT

In this article, the author analyses distributive laws and mixed distributive laws and their respective equivalences through the use of 2-adjunctions of the type Adj-Mnd. If a distributive law is expressed as a monad object in the 2-category Mnd(Cat), an equivalence can be done, through a 2-adjunction, between these laws and monads objects in the 2-category AdjR(Cat). In turn, these last monad objects correspond to liftings of monads over an Eilenberg-Moore category. On the other hand, this previous equivalence for monad objects can be also related with a pair consisting of an Eilenberg-Moore lifting and a Kleisli extension with a specific compatibility condition. This result was obtained by E. Manes y P. Mulry (2010) and it will be written through a 2-category context with the aditional property of naturality on one of the involved monads. The dual version is analysed for the mixed distributive laws. The objective of this article is to use 2-adjunctions of the type Adj-Mnd in order to analyse equivalences and isomorphisms of categorical structures in the classical theory of monads and to provide shorter and more clear proofs along with categorical naturality on these equivalences.

Key Words:Distributive Laws, monads, lifitngs, 2-adjunctions.

1. INTRODUCCIÓN

Estudios realizados por López, H. et al (2018), utilizan un par de 2-adjunciones y las aplican a equivalencias de categorías en teoría clásica de mónadas. Por su parte, Brzenzinski, et al (2011) establecieron métodos para la construcción de tales 2-adjunciones. El objetivo del estudio que realizaron por López, et al (2018), fue el de revisar equivalencias y biyecciones en teoría clásica de mónadas y analizarlas como una consecuencia de estructuras categóricas de nivel superior, en este caso una 2-adjunción. Al principio, esta aproximación parece ser más complicada que la metodología usual pero, a pesar de esta complejidad inicial, se obtiene una claridad en las demostraciones así como una reducción significativa en los argumentos para estas demostraciones. Asimismo, se obtiene una naturalidad categórica. Aún más, una sola 2-adjunción puede servir para diversas aplicaciones y equivalencias.

Uno de los ejemplos más representativos, revisado con las herramientas desarrolladas por por López, H. et al (2018), es la equivalencia entre el levantamiento de una estructura monoidal a una categoría de álgebras de Eilenberg-Moore y una mónada opmonoidal. Estudios relacionados son los de Moerdijk, I. (2002), asimismo como los realizados por Zawadoski, M. (2012) quienes exploran ésta situación en un contexto 3-categórico.

Dado que se tiene una herramienta 2-categórica, se pueden utilizar las correspondientes herramientas duales. Por lo anterior, López, H. et al (2018), consideran el caso dual de un levantamiento para una estructura monoidal, es analizado y consiste en la equivalencia entre la extensión de una estructura monoidal a la categória de Kleisli y una estructura monoidal para la mónada involucrada. Asimismo para la construcción dual de Kleisli, Moerdijk, I. (2002) proponen una técnica adecuada

Otros ejemplos representativos son lo que realizan Climent Vidal y Soliveres Tur (2010). En relación a los levantamientos de Eilenberg-Moore son de utilidad los desarrollos realizados por Tanaka, M. (2005) y para los funtores algebra se toman como referencia lo realizado por Dubuc, E.J. (1970).

En este artículo, uno de los autores continua con el objetivo planteado Brzenzinski, et al (2011), aplicando la estructura de 2-adjunciones del tipo **Adj-Mnd** a leyes distributivas y leyes distributivas mixtas.

Por lo que, la estructura del artículo se da a continuación.

En la sección 2.1, se comienza por la observación debido a R. Street, en [8], sobre la equivalencia entre una ley distributiva y un objeto mónada en la 2-categoría **Mnd**(*Cat*). Dado que la 2-adjunción de Eilenberg-Moore transporta objetos mónada entre las dos categorías involucradas, se tiene un objeto mónada en la 2-categoría $\mathbf{Adj}_{\mathrm{R}}(Cat)$. Este último objeto mónada es equivalente, a su vez, a un levantamiento de una mónada a la categoría de álgebras de Eilenberg-Moore de la otra mónada, perteneciente a la ley distributiva. Se demostrará que esta equivalencia es natural para una de las mónadas involucradas.

En la sección 2.2, se realiza la segunda revisión sobre una ley distributiva. Se demuestra la equivalencia entre una ley distributiva y un par que consiste de un levantamiento a una categoría de álgebras de Eilenberg-Moore y a una extensión a una categoría de Kleisli. Lo anterior se realiza al utilizar simultáneamente un par de 2-adjunciones del tipo **Adj-Mnd**, la primera corrrespondiente con la construcción de álgebras de Eilenberg-Moore y la otra que corresponde a la construcción de álgebras de Kleisli. Al utilizar este par de 2-adjunciones, la naturalidad de la equivalencia se prueba para las dos mónadas involucradas en la ley distributiva.

En la sección 3.1, se lleva a cabo la misma metodología para una ley distributiva mixta. Se observa primero que una ley distributiva mixta es un objeto comónada en **Mnd**(*Cat*) la cual puede ser trasladada a la 2-categoría $\mathbf{Adj}_R(Cat)$ con el fin de obtener un levantamiento de la comónada a la categoría de Eilenberg-Moore. En esta equivalencia, solo se encuentra la naturalidad sobre la mónada.

En la sección 3.2, la segunda aproximación se hace sobre la equivalencia de una ley distributiva mixta con dos levantamientos simultáneos, uno sobre la categoría de Eilenberg-Moore para las álgebras de la mónada y el otro corrrespondiente a la categoría de coálgebras de Eilenberg-Moore para la comónada. Con el fin de conseguir esto, un par de 2-adjunciones de Eilenberg-Moore, del tipo **Adj-Mnd** tienen que manejarse. En esta revisión, la naturalidad de la equivalencia se obtiene tanto para la mónada como para la comónada.

La notación y las convenciones para este artículo son las siguientes. Se toma la dirección de una adjunción como la dirección del funtor izquierdo correspondiente. Se nos permite tomar la notación de la mónada (S, μ^S, η^S) sobre la categoría C como (C, S, μ^S, η^S) ó (C, S), en su forma compacta, donde la multiplicación y la unidad de la mónada se omiten.

En lo que respecta a la notación, para la adjunción libre-olvidadiza para la categoría de Eilenberg-Moore para la mónada (S, μ^S, η^S), la notación es la siguiente $F^S \dashv U^S : C \to C^S$. A su vez, la adjunción de Kleisli se denota como $D_S \dashv V_S : C \to C_S$. Dada la adjunción $L \dashv R: C \to D$, su correspondiente unidad se denotará como η^{RL} y su counidad como ε^{LR}. Esta notación se utiliza para evitar el uso de múltiples letras griegas para denotar distintas unidades y counidades.

En todo el presente artículo, *Cat* representará a la 2-categoría de pequeñas categorías, funtores y transformaciones naturales.

Se provee de un apéndice con el fin de explicar, hasta cierto detalle, la construcción de las 2-adjunciones.

2. Leyes Distributivas y Objetos Mónada

Se comienza esta sección dando la definición de una ley distributiva.

Definición 2.1 *Una* **ley distributiva** *de la mónada* (C, S) *a la mónada* (D, T) *sobre la misma categoría C, es una transformación natural* $\varphi: ST \to TS$ *tal que los siguientes diagramas conmutan*

$$
\begin{tikzcd}
SST \arrow[r, "S\varphi"] \arrow[d, "\mu^S T"'] & STS \arrow[r, "\varphi S"] & TSS \arrow[d, "T\mu^S"] \\
ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "\eta^S T"'] \arrow[dr, "T\eta^S"] & \\
ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
STT \arrow[r, "\varphi T"] \arrow[d, "S\mu^T"'] & TST \arrow[r, "T\varphi"] & TTS \arrow[d, "\mu^T S"] \\
ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, "S\eta^T"'] \arrow[dr, "\eta^T S"] & \\
ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS
\end{tikzcd}
$$

2.1. Objetos Mónada

En 1969, J. Beck probó, en [1], que una ley distributiva es equivalente al levantamiento de una estructura de mónada T sobre C a una mónada T sobre la categoría de álgebras de Eilenberg-Moore, a saber C^S.

R. Street, en [6], notó que una ley distributiva φ, de (S, μ^S, η^S) a (T, μ^T, η^T), puede ser vista como un objeto mónada en **Mnd**(*Cat*), con la respectiva endo-celda dada como (T, φ) sobre la 0-celda (C, S).

La equivalencia de J. Beck se puede tomar dentro del contexto de una 2-adjunción del tipo **Adj-Mnd**, cf. [3] y [5].

Teorema 2.1.1 *Existe una biyección entre las siguientes estructuras:*

1. Levantamientos de mónadas (T, μ^T, η^T)*, sobre C, a la categoría de álgebras de Eilenberg-Moore* C^S*. Es decir, objetos mónada en* $\mathbf{Adj}_R$(*Cat*)*.*

2. Leyes distributivas de la mónada (S, μ^S, η^S) a (T, μ^T, η^T)*, ambas sobre C. Es decir, se tienen objetos mónada en* **Mnd**(*Cat*) de la forma ((C, S), (T, φ), μ^T, η^T)

Esta biyección es natural en la mónada (S, μ^S, η^S).

Demostración:

Tome la 2-adjunción de Eilenberg-Moore $\Phi_E \dashv \Psi_E$, veáse [5] o el apéndice.

$$\mathbf{Adj}_R(Cat) \underset{\Phi_E}{\overset{\Psi_E}{\leftrightarrows}} \mathbf{Mnd}(Cat)$$

Para esta 2-adjunción, y cualquier otra, se puede obtener un isomorfismo de categorías para todo par de objetos $L \dashv R$ en $\mathbf{Adj}_R(Cat)$ y (Z, T) en $\mathbf{Mnd}(Cat)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Adj}_R(Cat)}(L \dashv R, \Psi_E(Z,T)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mnd}(Cat)}(\Phi_E(L \dashv R),(Z,T))$$

Si en el previo isomorfismo, se toma $L \dashv R = F^S \dashv U^S$ y $(Z, T) = (C, S)$, entonces se obtiene

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Adj}_R(Cat)}(D^S \dashv U^S, D^S \dashv U^S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mnd}(Cat)}((C,S),(C,S))$$

Este isomorfismo toma, por ejemplo, 1-celdas en $\mathbf{Adj}_R(Cat)$ de la forma

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "T"] & C \\ C^S \arrow[u, "U^S"] \arrow[r, "\overline{T}"'] & C^S \arrow[u, "U^S"'] \end{tikzcd}$$

a 1-celdas en $\mathbf{Mnd}(Cat)$, de la forma $(T, \varphi)\colon (C, S) \to (C, S)$ tal que $\varphi\colon ST \to TS$ es una transformación natural, tal que los siguientes diagramas conmuten

$$\begin{tikzcd} SST \arrow[r, "S\varphi"] \arrow[d, "\mu^S T"'] & STS \arrow[r, "\varphi S"] & TSS \arrow[d, "T\mu^S"] \\ ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\eta^S T"'] \arrow[dr, "T\eta^S"] & \\ ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS \end{tikzcd}$$

Es decir, la primera pareja de diagramas requeridos por una ley distributiva. Considere ahora las siguientes 2-celdas en $\mathbf{Adj}_{\mathrm{R}}(Cat)$

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, bend left, "TT"] \arrow[rr, bend right, "T"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \mu^T"] \arrow[d, shift right=1ex, "F^S"'] & & C \arrow[d, shift right=1ex, "F^S"'] \\
C^S \arrow[rr, bend left, "\overline{TT}"] \arrow[rr, bend right, "\overline{T}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \overline{\mu}^T"] \arrow[u, shift right=1ex, "U^S"'] & & C^S \arrow[u, shift right=1ex, "U^S"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, bend left, "1_C"] \arrow[rr, bend right, "T"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \eta^T"] \arrow[d, shift right=1ex, "F^S"'] & & C \arrow[d, shift right=1ex, "F^S"'] \\
C^S \arrow[rr, bend left, "1_{C^S}"] \arrow[rr, bend right, "\overline{T}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \overline{\eta}^T"] \arrow[u, shift right=1ex, "U^S"'] & & C^S \arrow[u, shift right=1ex, "U^S"']
\end{tikzcd}
$$

De acuerdo al apéndice A1, la counidad de la 2-adjunción de Eilenberg-Moore $\varepsilon^{\Phi\Psi\mathrm{E}}$, sobre la 0-celda $F^S \dashv U^S$, es la identidad por lo que la imagen isomorfa de las anteriores 2-celdas es el par

$$
\mu^S : (T,\varphi)\cdot(T,\varphi) \longrightarrow (T,\varphi) : (C,S) \longrightarrow (C,S)
$$

$$
\eta^S : (1_C, 1_S) \longrightarrow (T,\varphi) : (C,S) \longrightarrow (C,S)
$$

Es decir, éstas 2-celdas cumplen con la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
STT \arrow[r, "\varphi T"] \arrow[d, "S\mu^T"'] & TST \arrow[r, "T\varphi"] & TTS \arrow[d, "\mu^T S"] \\
ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "S\eta^T"'] \arrow[dr, "\eta^T S"] & \\
ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS
\end{tikzcd}
$$

Los anteriores diagramas corresponden al segundo par de diagramas requeridos por una ley distributiva. Asimismo, se puede dar otra interpretación del anterior procedimiento. La imagen isomorfa para la mónada

$$
(F^S \dashv U^S, (T, \overline{T}), (\mu^T, \overline{\mu}^T), (\eta^T, \overline{\eta}^T))
$$

es la mónada $((C, S), (T, \varphi), \mu^T, \eta^T)$, donde la transformación natural φ tiene la siguiente forma

$$\varphi = U^S \lambda^T = U^S \varepsilon^{FUS} \overline{T} F^S \circ U^S F^S T \eta^{UFS}$$

Veáse la sección del apéndice A1 para la construcción del 2-funtor Φ_E, y la obtención del tal trasformación natural. Debido al isomorfismo natural de categorías, la biyección es natural en la mónada (C, S). □

Note que el 2-funtor Φ_E siempre envia objetos mónada a objetos mónada, pero la equivalencia encontrada aquí es de particular importancia.

2.2. Combinando levantamientos de Eilenberg-Moore y extensiones de Kleisli

La naturalidad sobre las dos mónadas, de la anterior equivalencia de estructuras, se puede establecer finalmente con la adición de una segunda 2-adjunción. Para este fin, considere el siguiente teorema debido a E. Manes & P. Mulry, [6].

Teorema 2.2.1 *Considere las siguientes mónadas* (S, μ^S, η^S) y (T, μ^T, η^T) *sobre C. Una transformación natural* φ: *$ST \to TS$ es una ley distributiva de S a T sii clasifica simultáneamente*, *y de forma compatible, como un levantamiento de Eilenberg-Moore, para el endofuntor T, y como una extensión de Kleisli, para el endofuntor S, de acuerdo a los siguientes diagramas conmutativos*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "T"] & C \\ C^S \arrow[u, "U^S"] \arrow[r, "\overline{T}"'] & C^S \arrow[u, "U^S"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "S"] \arrow[d, "D_T"'] & C \arrow[d, "D_T"] \\ C_T \arrow[r, "\underline{S}"'] & C_T \end{tikzcd}$$

Demostración:

La mitad de la prueba ya se realizó, es decir, existe una correspondencia biyectiva entre levantamientos para T como en el primer diagrama del presente teorema y morfismos de la forma (T, φ): (C, S) $\to$ (C, S) en **Mnd**(*Cat*).

Con el fin de establecer una correspondencia biyectiva que sea natural también sobre la mónada (C, T, μ^T, η^T), otra 2-adjunción del tipo **Adj-Mnd** tiene que considerarse, cf. [3] y [5]. A saber, la llamada 2-adjunción de Kleisli:

$$\mathbf{Mnd}^{\bullet}(Cat) \underset{\Psi_K}{\overset{\Phi_K}{\leftrightarrows}} \mathbf{Adj}_L(Cat)$$

La construcción de tal 2-adjunción se describe en la sección A2 del Apéndice.

Debido a esta 2-adjunción, existe el siguiente isomorfismo de categorías, natural en la mónada (C, T), en **Mnd**(Cat), y sobre la adjunción $D_T \dashv V_T$, en $\mathbf{Adj}_L(Cat)$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mnd}^{\bullet}(Cat)}((C,T), \Phi_K(D_T \dashv V_T)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Adj}_L(Cat)}(\Psi_K(C,T), D_T \dashv V_T))$$

Aplicando los correspondientes 2-funtores, el anterior es un isomorfismo de la forma

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mnd}^{\bullet}(Cat)}((C,T),(C,T)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Adj}_L(Cat)}(D_T \dashv V_T, D_T \dashv V_T)$$

Por lo tanto, extensiones a la categoría de Kleisli C_T, es decir, objetos en la categoría $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Adj}L}(D_T \dashv V_T, D_T \dashv V_T)$,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "S"] \arrow[d, "D_T"'] & C \arrow[d, "D_T"] \\ C_T \arrow[r, "\underline{S}"'] & C_T \end{tikzcd}$$

Estan en biyección con las transformaciones naturales φ: $ST \to TS$ tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} STT \arrow[r, "\varphi T"] \arrow[d, "S\mu^T"'] & TST \arrow[r, "T\varphi"] & TTS \arrow[d, "\mu^T S"] \\ ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "S\eta^T"'] \arrow[dr, "\eta^T S"] & \\ ST \arrow[rr, "\varphi"'] & & TS \end{tikzcd}$$

Los anteriores diagramas conmutativos son precisamente los que corresponden al segundo par de la definición de una ley distributiva. Por lo tanto, se completa la ley distributiva de *S* a *T*.

Solo resta pedir una última condición. Tanto la transformación asociada al levantamiento a la categoría de Eilenberg-Moore como la asociada a la extensión de Kleisli tiene que ser la misma. Esta condición se puede obtener al pedir que la siguiente ecuación se cumpla

$$U^S\lambda^T = \rho_S D_T$$

En donde λ^T es el asociado del primer diagrama conmutativo en Teorema 2.2.1 y ρ_S es el asociado del segundo diagrama conmutativo. El requisito previo puede también expresarse como

$$\Phi_E(T,\overline{T},\lambda^T) = \Psi_K(S,\underline{S},\rho_S)$$

De aquí la compatilidad entre el levantamiento y la extensión. □

En este punto, el Teorema 2.2.1 puede reescribirse con la naturalidad adicional de las mónadas (S, μ^S, η^S) y (T, μ^T, η^T) sobre C.

3. Leyes Distributivas Mixtas

El procedimiento previo puede ser aplicado para el caso de las leyes distributivas mixtas.

Definición 3.1 *Una* **ley distributiva mixta** *de la mónada* (S, μ^S, η^S) *a la comónada* (G, δ^G, ε^G), *sobre* C, *es una transformación natural* ψ: $SG \to GS$ *tal que los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{tikzcd} SSG \arrow[r, "S\psi"] \arrow[d, "\mu^S G"'] & SGS \arrow[r, "\psi S"] & GSS \arrow[d, "G\mu^S"] \\ SG \arrow[rr, "\psi"'] & & GS \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\eta^S G"'] \arrow[dr, "G\eta^S"] & \\ SG \arrow[rr, "\psi"'] & & GS \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
SGG \arrow[r, "\psi G"] & GSG \arrow[r, "G\psi"] & GGS \\
SG \arrow[u, "S\delta^G"] \arrow[rr, "\psi"'] & & GS \arrow[u, "\delta^G S"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& S & \\
SG \arrow[ur, "S\varepsilon^G"] \arrow[rr, "\psi"'] & & GS \arrow[ul, "\varepsilon^G S"']
\end{tikzcd}
$$

3.1 Objetos Comónada

De la misma forma que se hizo para los objetos mónada en la Sección 2.1.

Teorema 3.1.1 *Existe una biyección entre las siguientes estructuras*:

1. *Leyes distributivas mixtas de la mónada* (S, μ^S, η^S) *a la comónada* (G, δ^G, ε^G), *sobre C. Es decir, objetos comónada en* **Mnd**(*Cat*).

2. *Levantamientos de la comónada* (G, δ^G, ε^G) *sobre C, a las coálgebras de Eilenberg-Moore* C^S. *Es decir, objetos comónada en* $\mathbf{Adj}_R$(*Cat*).

Esta biyección es natural en la mónada (S, μ^S, η^S) *sobre C.* □

3.2. Combinando levantamientos de Eilenberg-Moore a las categorías de álgebras y coálgebras

Un teorema similar para las leyes distributivas mixtas puede escribirse involucrando un par de levantamientos de Eilenberg-Moore.

Teorema 3.2.1 *Dada la mónada* (S, μ^S, η^S) *y la comónada* (G, δ^G, ε^G) *sobre C. Una transformación natural* ψ: $SG \to GS$ *es una ley distributiva mixta de S a G sii los endofuntores clasifican simultáneamente, de manera compatible, como levantamientos de Eilenberg-Moore*:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "G"] & C \\
C^S \arrow[u, "U^S"] \arrow[r, "\overline{G}"'] & C^S \arrow[u, "U^S"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C^G \arrow[r, "\overline{S}"] \arrow[d, "U^G"'] & C^G \arrow[d, "U^G"] \\
C \arrow[r, "S"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Note el cambio de dirección para el levantamiento a las coálgebras. Lo anterior se debe a la convención de tomar la dirección de la adjunción como la dirección del respectivo funtor izquierdo.

Demostración:

La estructura de la demostración puede establecerse como sigue. Primero, se relaciona el primer par de diagramas conmutativos en la Definición 3.1 con el primer diagrama conmutativo, el levantamiento a las ágebras de Eilenberg-Moore, de este Teorema. Segundo, relacionar el segundo par de diagramas conmutativos en la Definición 3.1 con el segundo diagrama, el levantamiento a las coálgrebras de Eilenberg-Moore, de este mismo Teorema.

Sin embargo, la primera parte ya se realizó en la demostración del Teorema 2.1.1, solo se tiene que cambiar el endofuntor T por G y el resto se deja igual.

Para la segunda parte, se tiene que considerar otra 2-adjunción de Eilenberg-Moore para las comónadas. Para empezar, se toma la 2-categoría co-opuesta Cat^{co}. Al hacer esto, se tienen los siguientes isomorfismos

$$\mathbf{Adj}_R(Cat^{co}) \cong \mathbf{Adj}_L(Cat),\ \mathbf{Mnd}(Cat^{co}) \cong \mathbf{CoMnd}(Cat)$$

Si la 2-categoría **CoMnd**(*Cat*) admite la construcción de álgebras entonces la siguiente 2-adjunción se puede construir

$$\mathbf{Adj}_L(Cat) \underset{\Gamma_E}{\overset{\Omega_E}{\leftrightarrows}} \mathbf{CoMnd}(Cat)$$

Para esta 2-adjunción, y para las 0-celdas $L \dashv R$ en $\mathbf{Adj}_L(Cat)$ y una comónada (Z, G) en **CoMnd**(*Cat*), existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Adj}_L(Cat)}(L \dashv R, \Omega_E(Z,G)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{CoMnd}(Cat)}(\Gamma_E(L \dashv R),(Z,G))$$

En particular, si $L \dashv R = U^G \dashv D^G$, es decir, la adjunción de Eilenberg-Moore para la correspondiente comónada y $Z = C$, entonces el anterior isomorfismo de categorías se puede escribir como

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Adj}_L(Cat)}(U^G \dashv D^G, U^G \dashv D^G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{CoMnd}(Cat)}((C,G),(C,G))$$

Por lo tanto, existe una correspondencia biyectiva entre los objetos en la categoría $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Adj}\mathrm{L}}(U^G \dashv D^G, U^G \dashv D^G)$, es decir, levantamientos a la categoría de coálgebras de Eilenberg-Moore como en el segundo diagrama de este Teorema y objetos en la categoría $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CoMnd}(\mathrm{Cat})}((C, G)), (C, G))$, es decir, pares de diagramas conmutativos como el segundo par de la Definición 3.1.

Finalmente, se tiene que considerar la compatibilidad de la siguiente imagen para el par de 2-adjunciones

$$\Phi_E\,(G,\overline{G},\lambda^G) = \Gamma_E\,(S,\overline{S},\rho^S)$$

o

$$U^S\lambda^G = U^G\rho^S$$

Note que ρ_S es el asociado del segundo diagrama conmutativo para este Teorema.

La equivalencia previa es natural tanto en la mónada (S, μ^S, η^S) como en la comónada (G, δ^G, ε^G). □

4. Contexto 2-categórico

La discusión completa para este artículo puede tomarse para 2-categorías arbitrarias sin problema alguno, no solo para la 2-categoría *Cat*. Es decir, se puede considerar a una 2-categoría arbitraria *A* tal que tanto ella misma, como sus respectivos duales A^{op} y A^{co}, acepten la construcción de álgebras. Se le invita al lector a revisar [5] para la construcción formal de la 2-adjunción de Kleisli en este contexto general. Asimismo, se invita a leer [8] para observar las consecuencias de que una 2-categoría acepte la construcción de álgebras. Esta última referencia provee de todos los cálculos necesarios correspondientes para la construcción de la 2-adjunción de Eilenberg-Moore para la 2-categoría *A*.

5. Discusión

En los estudios desarrollados por Beck (1969), el autor encontró una equivalencia para la caracterización de leyes distributivas en términos del producto de mónadas. El autor de este artículo no pudo encontrar esta equivalenca usando la referida 2-adjunción. Se menciona esto como una posible ruta de trabajo future para el uso de las 2-adjunciones del tipo **Adj**-**Mnd**.

El autor considera que la presente aproximación es útil, en resultados clásicos para la teoría de mónadas, debido al hecho que añade claridad a la demostraciones. Sobre una complejidad inicial, las explicaciones son más fáciles y las aplicaciones puede ser muchas. Note que la misma 2-adjunción puede "reusarse" para producir diferentes equivalencias categóricas y por lo tanto generar equivalencias materiales entre distintas estructuras. En el caso contrario, una prueba usual en teoría de mónadas no siempre se puede reciclar.

6. Conclusiones y trabajo futuro

Estos ejemplos pueden añadirse al conocimiento acumulado por López, H. et al (2018), dando así más soporte a la aplicabilidad e importancia de esta metodología.

En lo que concierne la trabajo futuro, falta explorar la 2-adjunción con el fin de conseguir la equivalencia para la mónada producto.

Finalmente, el autor pide a los lectores conseguir ejemplos adecuados para el contexto usado en este artículo con el fin de comprender lo que la teoría de 2-categorías tenga que decir de la teoría clásica de mónadas. Estos ejemplos pueden conseguirse tanto en teoría de categorías, lógica o programación funcional en donde el contexto de la 2-adjunción puede aplicarse.

8. Apéndice

En este apéndice, listamos las tres 2-adjunciones que toman un rol importante en este artículo, con un doble próposito. Primero, el propósito es tenerlos a la mano en caso de que alguien pretenda aplicarlos. Segundo, para explicar su uso dentro de este artículo pero sin construirlos allí mismo para no obstruir la continuidad de la lectura.

A1 La 2-adjunción de Eilenberg-Moore para mónadas

$$\mathbf{Adj}_R(Cat) \underset{\Phi_E}{\overset{\Psi_E}{\rightleftarrows}} \mathbf{Mnd}(Cat)$$

La 2-adjunción de Eilenberg-Moore para mónadas esta compuesta de diversas estructuras. Para empezar, la 2-categoría $\mathbf{Adj}_R(Cat)$ tiene las siguientes n-celdas.

1. Las 0-celdas son adjunciones $L \dashv R : \mathrm{C} \to X$ y $L' \dashv R' : \mathrm{D} \to Y$.

2.- Las 1-celdas son pares de funtores, junto con una transformación natural, (J, V, λ^{JV}): $L \dashv R \to L' \dashv R'$. En donde J: $C \to D$ y V: $X \to Y$ son funtores y el cuadrado que involucra los funtores adjuntos derechos conmuta, es decir $JR = R'V$, de allí el subíndice que corresponde con la referida conmutatividad. La transformación natural λ^{JV} corresponde al asociado adjunto de la transformación natural, identidad, ρ^{JV}: $JR \to R'V$.

3.- Las 2-celdas son pares de transformaciones naturales (α, β): $(J, V, \lambda^{JV}) \to (K, W, \lambda^{KW})$: $L \dashv R \to L' \dashv R'$ tal que α: $J \to K$ y β: $V \to W$ cumplen con alguna de las siguientes, equivalentes, condiciones:

- $\lambda^{KW} \circ L'\alpha = \beta L \circ \lambda^{JV}$,
- $\alpha R = R'\beta$.

Las composiciones y las unidades son las inducidas por la 2-categoría subyacente.

La 2-categoría **Mnd**(Cat) se compone de los siguientes n-celdas:

1.- Las 0-celdas son mónadas (C, S, μ^S, η^S).

2.- Las 1-celdas son pares (P, φ): (C, S) $\rightarrow$ (D, T), en donde P: $C \rightarrow D$ es un funtor y φ: $TP \rightarrow PS$ es una transformación natural tal que

$$P\mu^S \circ \varphi S \circ T\varphi = \varphi \circ \mu^T P$$

y

$$P\eta^S = \varphi \circ \eta^T P$$

3.- Las 2-celdas son transformaciones naturales θ: (P, φ^P) $\rightarrow$ (Q, φ^Q), tal que

$$\varphi^Q \circ T\theta = \theta S \circ \varphi^P$$

La composición y las unidades son las obvias.

El 2-funtor Φ_E actúa sobre n-celdas como sigue:

1.- Sobre 0-celdas, $\Phi_E\,(L \dashv R) = (C, RL, \mathrm{R}\varepsilon^{LR}\mathrm{L}, \eta^{RL})$, *i.e.* la *mónada inducida por la adjunción*.

2.- Sobre 1-celdas, $\Phi_E\,(J, V, \lambda^{JV}) = (J, \mathrm{R}\lambda^{JV})$: $(C, RL) \rightarrow (D, R'L')$.

3.- Sobre 2-celdas, $\Phi_E\,(\alpha, \beta) = \alpha$.

El 2-funtor derecho Ψ_E actúa sobre n-celdas como sigue:

1.- Sobre 0-celdas, $\Psi_E\,(C, S) = F^S \dashv U^S : C \rightarrow \mathrm{C}^S$, *i.e.* la *adjunción libre-olvidadiza* de Eilenberg-Moore, de aquí el nombre de la 2-adjunción.

2.- Sobre 1-celdas, $\Psi_E\,(P, \varphi) = (P, P^\varphi, \lambda^P)$: $F^S \dashv U^S \rightarrow F^T \dashv U^T$.

El funtor P^φ actúa sobre objetos como $P^\varphi(N, k_N) = (PN, Pk_N \bullet \varphi N)$ y la transformación natural λ^P es el adjunto asociado a la conmutatividad $U^T P^\varphi = PU^S$, esto es

$$\lambda^P = \varepsilon^{FUT} P^{\varphi} F^S \circ F^T P \eta^{UFS}$$

3.- Sobre 2-celdas, $\Psi_E(\theta) = (\theta, \theta^{\varphi})$, en donde $U^T\theta^{\varphi}(N, k_N) = \theta N$.

La unidad de la 2-adjunción $\eta^{\Psi\Phi E}$: $1_{\mathbf{Adj}\mathrm{R}(Cat)} \rightarrow \Psi_E\Phi_E$, actúa sobre 0-celdas, $L \dashv R$ de la siguiente forma

$$\eta^{\Psi\Phi E}(L \dashv R) : L \dashv R \longrightarrow F^{RL} \dashv U^{RL}$$

Por lo tanto, la definición es $\eta^{\Psi\Phi E}(L \dashv R) = (1_C, K^{RL}, \lambda^{RL})$, en donde K^{RL}: $X \rightarrow C^{RL}$ es el *funtor de comparación* para la adjunción, definido para objetos como $K^{RL}(X) = (RX, R\varepsilon^{LR}X)$, y λ^{RL} es el correspondiente adjunto asociado.

La counidad de la 2-adjunción, $\varepsilon^{\Phi\Psi E}$: $\Phi_E\Psi_E \rightarrow 1_{\mathbf{Mnd}(Cat)}$, tiene que actuar sobre 0-celdas, (C, S), como sigue

$$\varepsilon^{\Phi\Psi E}(C, S) : (C, S) \longrightarrow (C, S)$$

Por lo tanto, la componente se define como la identidad $\varepsilon^{\Phi\Psi E}(C, S) = (1_C, 1_S)$.

A2 La 2-adjunción de Kleisli para mónadas

$$\mathbf{Mnd}^{\bullet}(Cat) \underset{\Psi_K}{\overset{\Phi_K}{\leftrightarrows}} \mathbf{Adj}_L(Cat)$$

Donde $\mathbf{Mnd}^{\bullet}(Cat)$ es isomorfa a $\mathbf{Mnd}(Cat^{\mathrm{op}})$. Note el cambio de dirección de la 2-adjunción.

La 2-categoría $\mathbf{Mnd}^{\bullet}(Cat)$ se compone de las siguientes *n*-celdas.

1.- Las 0-celdas son mónadas (C, S).

2.- Las 1-celdas son pares $(P, \psi): (C, S) \to (B, T)$, en donde $P: C \to B$ es un funtor y $\psi: PS \to TP$ es una transformación natural tal que los siguientes requisitos se cumplen

$$\mu^T P \circ T\psi \circ \psi S = \psi \circ P\mu^S$$

y

$$\eta^T P = \psi \circ P\eta^S$$

3.- Una 2-celda $\vartheta: (P, \psi^P) \to (Q, \psi^Q): (C, S) \to (B, T)$ es una transformacion natural $\vartheta: P \to Q: C \to B$ tal que

$$T\vartheta \circ \psi^P = \psi^Q \circ \vartheta S$$

La 2-categoría $\mathbf{Adj}_L$(Cat) difiere de $\mathbf{Adj}_R$(*Cat*) al cambiar la conmutatividad de los adjuntos derechos por la de los izquierdos, por lo tanto se omiten los detalles de su estructura.

El 2-funtor izquierdo Ψ_K actúa sobre *n*-celdas como sigue:

1.- Sobre 0-celdas, $\Psi_K (C, S) = D_S \dashv V_S: C \to C_S$, *i.e.* la adjunción de Kleisli.

2.- Sobre 1-celdas, $\Psi_K (P, \psi) = (P, P_\psi, \rho^P): D_S \dashv V_S \to D_T \dashv V_T$.

El funtor $P_\psi: C_S \to B_T$ actúa sobre objetos como $P_\psi (X) = PX$ y sobre morfismos, $y^\# : X \to Y$ en C_S, como $P_\psi (y^\#) = (\psi Y \bullet Py)^\#$ el cual hace que el cuadrado de los adjuntos izquierdos conmute y ρ^P es el adjunto asociado al diagrama conmutativo correspondiente.

3.- Sobre 2-celdas, $\vartheta: (P, \psi^P) \to (Q, \psi^Q)$, $\Psi_K (\vartheta) = (\vartheta, \vartheta^\psi)$, en donde las componentes de la transformación natural ϑ^ψ sobre los objetos, X en C_S, es

$$\vartheta^\psi(X) = (\eta^T QX \cdot \vartheta X)^\#$$

El 2-funtor derecho Φ_K difiere solo significativamente de Φ_E en las 1-celdas, en donde $\Phi_K(J, V, \rho^{JV}) = (J, \rho^{JV}L)$.

La unidad para la 2-adjunción $\eta^{\Phi\Psi K}$: $1_{\mathbf{Mnd}(Cat)} \rightarrow \Phi_K\Psi_K$ tiene que actuar sobre 0-celdas (C, S) como sigue

$$\eta^{\Phi\Psi K}(C,S):(C,S) \longrightarrow (C,S)$$

Por lo tanto, la componente de la unidad se define como la unidad en $\mathbf{Mnd}^{\bullet}(Cat)$, es decir, $\eta^{\Phi\Psi K}(C, S) = (1_C, 1_S)$.

La counidad de la 2-adjunción de Kleisli $\varepsilon^{\Psi\Phi K}$: $\Psi_K\Phi_K \rightarrow 1_{\mathbf{Adj}L(Cat)}$ tiene que actuar sobre 0-celdas $L \dashv R$, como sigue

$$\varepsilon^{\Psi\Phi K}(L \dashv R): D_{RL} \dashv V_{RL} \longrightarrow L \dashv R$$

Por lo tanto, $\varepsilon^{\Psi\Phi K}(L \dashv R) = (1_C, K_{RL}, \rho^{RL})$ en donde K_{RL} es el *funtor de comparación* de Kleisli y ρ^{RL} es el adjunto asociado para la conmutación de los adjuntos izquierdos.

A3 La 2-adjunción de Eilenberg-Moore para comónadas

La 2-adjunción de Eilenberg-Moore para comónadas

$$\mathbf{Adj}_L(Cat) \underset{\Gamma_E}{\overset{\Omega_E}{\leftrightarrows}} \mathbf{CoMnd}(Cat)$$

En donde $\mathbf{Mnd}(Cat^{co})$ es isomorfa a $\mathbf{CoMnd}(Cat)$, esta última se compone de la siguiente estructura. La 2-categoría de comónadas $\mathbf{CoMnd}(Cat)$ cuyas n-celdas están dadas como a continuación.

1.- Las 0-celdas son comónadas $(X, G, \delta^G, \varepsilon^G)$.

2.- Las 1-celdas son pares (P, π): $(X, G) \rightarrow (Y, H)$, donde P: $X \rightarrow Y$ es un funtor y π: $PG \rightarrow HP$ es una transformación natural tal que

$$\delta^H P \circ \pi = H\pi \circ \pi G \circ P\delta^G$$

y

$$\varepsilon^H P \circ \pi = P\varepsilon^G$$

3.- Las 2-celdas son transformaciones naturales ϑ: $(P, \pi^P) \to (Q, \pi^Q)$, donde ϑ: $P \to Q$: $X \to Y$ cumple con la siguiente ecuación

$$H\vartheta \circ \pi^P = \pi^Q \circ \vartheta G$$

Las composiciones y las unidades son las obvias.

El 2-funtor izquierdo Γ_E actúa sobre las n-celdas como sigue.

1.- Sobre 0-celdas, $L \dashv R$, Γ_E $(L \dashv R)$ = $(X, LR, L\eta^{RL}R, \varepsilon^{LR})$, i.e. la *comónada inducida por la adjunción*.

2.- Sobre 1-celdas, Γ_E $(J, V, \rho^{JV}) = (V, L'\rho^{JV})$: $(X, LR) \to (Y, L'R')$.

3.- Sobre 2-celdas, Γ_E $(\alpha, \beta) = \beta$: $K \to W$.

El 2-funtor derecho Ω_E actúa sobre n-celdas como sigue.

1.- Sobre 0-celdas, (X, G), Ω_E $(X, G) = U^G \dashv F^G$: $X^G \to X$, donde X^G es la categoría de cóalgebras de Eilenberg-Moore y la adjunción $U^G \dashv F^G$ es la adjunción olvidadiza-colibre usual.

2.- Sobre 1-celdas, Ω_E $(P, \pi) = (P^\pi, P, \rho^P)$: $U^G \dashv F^G \to U^H \dashv F^H$. El funtor P^π: $X^G \to Y^H$ esta definido sobre coálgebras (N, l_N) como $P^\pi(N, l_N) = (PN, \pi N \bullet Pl_N)$. El anterior funtor hace que el cuadrado izquierdo conmute y ρ^P es el asociado adjunto correspondiente.

3.- Sobre 2-celdas ϑ: $(P, \pi^P) \to (Q, \pi^Q)$, Ω_E $(\vartheta) = (\vartheta^\pi, \vartheta)$, en donde la componente, sobre (N, l_N), de la transformación natural ϑ^π es la siguiente

$$\vartheta^\pi(N, l_N) = \vartheta N$$

La unidad de la 2-adjunción $\eta^{\Omega\Gamma E}$: $1_{\mathbf{Adj}\mathrm{L(Cat)}} \to \Omega_E\Gamma_E$ tiene que actuar sobre las 0-celdas, $L \dashv R$, como sigue

$$\eta^{\Omega\Gamma E}(L \dashv R) : L \dashv R \longrightarrow U^{RL} \dashv F^{RL}$$

Por lo tanto, la componente de la unidad se define como $\eta^{\Omega\Gamma E}$ $(L \dashv R) = (K^{LR}, 1_X, \rho^{LR})$, donde K^{LR} es el *funtor de comparación* para la comónada *LR*.

La counidad de la 2-adjunción $\varepsilon^{\Gamma\Omega E}$: $\Gamma_E\Omega_E \rightarrow 1_{\mathbf{CoMnd}(\mathrm{Cat})}$ actúa sobre 0-celdas, (X, G), como sigue

$$\varepsilon^{\Gamma\Omega E}(X,G) : (X,G) \longrightarrow (X,G)$$

Por lo tanto, la componente de la counidad es la identidad en cualquier 0-celda, es decir, $\varepsilon^{\Gamma\Omega E}(X, G) = (1_X, 1_G)$.

Agradecimientos

El autor agradece al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONACYT) por el financiamiento parcial a través del apoyo SNI-59154.

Referencias

Beck, J. (1969) Distributive Laws. In *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory,* B. Eckmann, Ed., vol. 80 of Lectures Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, pag. 119-140.

Brzenzinski, T.; Vázquez-Márquez, A. y Vercryusse, J. (2011) The Eilenberg-Moore category and a Beck-type theorem for a Morita context. Appl. Categ. Structures **19** (5), pag. 821-858.

Climent Vidal, J. y Soliveres Tur, J. (2010) *Kleisli and Eilenberg-Moore constructions as part of a biadjoint situation*. Extracta Math. 25 (1), pag. 1-61.

Dubuc, E.J. (1970) *Kan extensions in enriched category theory*. Lecture Notes in Math. Vol. 145, Springer.

López H., J.; Turcio C., L. y Vázuez-Márquez, A. (2018) *Applications of the Kleisli and Eilenberg-Moore 2-adjunctions*. Por publicarse en Categories and General Algebraic Structures with Applications.

Manes, E. y Mulry, P. (2007) *Monad Compositions I: General constructions and recursive distributy laws*. Theory Appl. Categ. 18 (7), pag. 172-208.

Moerdijk, I. (2002) *Monads on tensor categories*. J. Pure Appl. Algebra 168 (2-3), pag. 189-208.

Street, R. (1972) *The formal theory of monads*. J. Pure Appl. Algebra 2 (2), pag. 149-168.

Tanaka, M. (2005) *Pseudo-distributive laws and a unified framework for variable binding*. Tesis Doctoral, The University of Edimburg.

Zawadoski, M. (2012) *The formal theory of monoidal monads*. J. Pure Appl. Algebra **216** (8), 1932-1942.